Б. Г. Габдулхаев, И. К. Рахимов (Казань)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследуются методы решения интегрального уравнения вида

$$A\varphi \equiv a(t)\varphi(t)+\frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{h(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\ln^m|\tau-t|}{|\tau-t|^\beta}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad -1<t<1, \qquad (1)$$

в вещественном пространстве $L_2 = L_2(-1,1)$ с обычными скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|_2$; здесь $a(t)\in C[-1,1]$, $h(t,\tau)\in H_\alpha[-1,1]$, $g(t,\tau)\in C[-1,1]^2$, $f(t)\in L_2$ — известные вещественные функции, $\varphi(t)\in L_2$ — искомая функция, λ и μ — произвольные вещественные параметры, а параметры α, β и m таковы, что $0<\alpha\le 1$, $0\le\beta<1$, $m+1\in\mathbb{N}$.

С использованием работ [1] и [2], гл. 4, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $|a(t)|\ge m=\text{const}\ge 0$, $h(t,\tau)=h(\tau,t)$, $g(t,\tau)=-g(\tau,t)$. *Тогда при любых* λ *и* $\mu\in\mathbb{R}$ *оператор* $A: L_2\to L_2$ *непрерывно обратим и*

$$\|A\|\le M=\text{const}<\infty, \quad \|A^{-1}\|\le m^{-1}<\infty. \qquad (2)$$

Теорема 2. *Слабосингулярный интегральный оператор* $B: L_2\to L_2$, *где*

$$B\varphi \equiv \frac{\lambda}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{h(t,\tau)-h(\tau,t)}{\tau-t}\varphi(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{\mu}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{g(t,\tau)+g(\tau,t)}{2}\cdot\frac{\ln^m|\tau-t|}{|\tau-t|^\beta}\varphi(\tau)\,d\tau,$$

является симметричным и вполне непрерывным.

Теорема 3. *Пусть* $a(t) \geq \gamma = \text{const} > 0$, *а* $\delta \in \mathbb{R}$ — *минимальное собственное значение оператора* B. *Если* $m \equiv \gamma + \delta > 0$, *то оператор* $A : L_2 \to L_2$ *непрерывно обратим и справедливы неравенства* (2).

Следствие. *Если* $\|B\| < \gamma$, *то оператор* $A : L_2 \to L_2$ *непрерывно обратим и*

$$\|A^{-1}\| \leq (\gamma - \|B\|)^{-1} < \infty.$$

Теорема 4. *В условиях любой из теорем* 1 *и* 3 *уравнение* (1) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in L_2$ *при любой правой части* $f \in L_2$, *где*

$$\frac{\|f\|}{M} \leq \|\varphi^*\| \leq \frac{\|f\|}{m},$$

которое можно найти универсальным одношаговым итерационным методом

$$\varphi^i(t) = \varphi^{i-1}(t) + \frac{m}{M^2}\left(f(t) - A\left(\varphi^{i-1}; t\right)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

сходящимся со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \left(1 - (m/M)^2\right)^{1/2} < 1$ *при любом* $\varphi^0 \in L_2$. *Если же начальное приближение* $\varphi^0(t) = \left(m/M^2\right) f(t)$, *то погрешность* i*-го приближения может быть оценена неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^i\| \leq \frac{q^{i+1}}{1-q}\frac{m}{M^2}\|f\|, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Обозначим через $\{e_i(t)\}_1^\infty$ полную ортонормальную систему функций в $L_2(-1,1)$. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде элемента

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i(t), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

неизвестные коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}$ которого определяются из конечной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(Ae_i, e_j\right) = (f, e_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Теорема 5. *В условиях любой из теорем 1 и 3 СЛАУ (8) имеет единственное решение при любых $n \in \mathbb{N}$. Приближенные решения (7) сходятся к точному решению со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(\varphi^*) \leq \|\varphi^* - \varphi_n\| \leq \frac{M}{m} E_n(\varphi^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $E_n(\varphi^*)$ – наилучшее среднеквадратическое приближение решения $\varphi^* \in L_2$ всевозможными элементами вида (7), а постоянные m и M определены в теоремах 1 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габдулхаев Б. Г. *Методы решения сингулярных интегральных уравнений с положительными операторами*// Дифференц. уравнения. - 1997. - Т. 33. No 3. - С. 400-410.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. - 230 с.

Е. Р. Газизов, Д. В. Маклаков (Казань)

ПРИНЦИП МАКСИМУМА РАСХОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ ОБ ОБТЕКАНИИ СТУПЕНИ

Рассматривается стационарное потенциальное течение слоя идеальной несжимаемой весомой жидкости над неровным полигональным дном в форме наклонной ступени.

Для любых течений над ступенью, у которых свободная поверхность имеет горизонтальные асимптоты слева и справа на бесконечности, справедливы формулы:

$$Fr^2 + 2 = \frac{Fr^2}{(L - H/h)^2} + 2L, \qquad Fr(\infty) = \frac{Fr}{(L - H/h)^{3/2}}.$$

Здесь $Fr = V_0/\sqrt{gh}$ — число Фруда, g — ускорение силы тяжести, h — глубина невозмущенного уровня свободной поверхности слева на бесконечности, V_0 — скорость невозмущенного потока